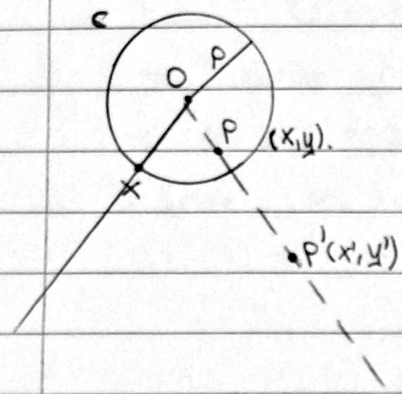
20/11/2018

7ο ΜΑΘΗΜΑ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Τα $P, P' \neq O$, εξ' ορισμού $OP \cdot OP' = \rho^2$ (προφανές, καθώς $\rho \neq 0$)

2) Κάθε σημείο του C απεικονίζεται στον εαυτό του.



• Έστω, τυχαίο $X \in C$

$\underbrace{OX}_{\rho} \cdot OX' = \rho^2$ (αφού, X: σημείο κύκλου).

$\rho \cdot OX' = \rho^2 \Rightarrow OX' = \rho$, $X' \in C$

$\Rightarrow X \in$ στην ημιευθεία $OX \Rightarrow X = X'$

3) Τα εσωτερικά σημεία του κύκλου αντιστροφής, απεικονίζονται σε εξωτερικά και αντίστροφα.

• Έστω, P: εσωτερικό σημείο και P': εικόνα του μέσω αντιστροφής

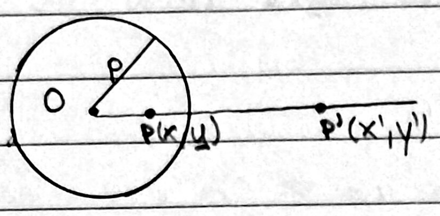
• $(OP)(OP') = \rho^2 \underset{OP<\rho}{\Rightarrow} (OP') = \dfrac{\rho^2}{OP} > \dfrac{\rho^2}{\rho} = \rho$

$\Rightarrow (OP') > \rho$

* Άρα, P': εξωτερικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.

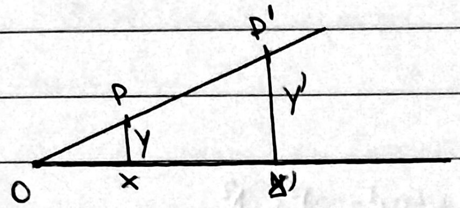
Σύνδεση συντ/νων P, P' μέσω αντιστροφής $C(O,\rho)$



Μέσω ομοιότητας $\left(\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}\right)$ (*)

$(OP)(OP')=\rho^2$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}=\rho^2$



$\Rightarrow (x^2+y^2)\cdot(x'^2+y'^2)=\rho^4$

Λόγω (*): $y'=\frac{yx'}{x}$

$$(x^2+y^2)\left(x'^2+\frac{y^2x'^2}{x^2}\right)=\rho^2 \to (x')^2\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)=\frac{\rho^4}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x')^2=\frac{\rho^4x^2}{(x^2+y^2)^2}\Rightarrow x'=\frac{\rho^2\cdot x}{x^2+y^2}$$

Λόγω συμμετρίας: $y'=\frac{\rho^2 y}{x^2+y^2}$

▶ΓΕΝΙΚΑ: Αν θεωρήσω κύκλο αντιστροφής $C((x_0,y_0),\rho)$, τότε

$$\begin{cases} x'=x_0+\frac{\rho^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \\ y'=y_0+\frac{\rho^2(y-y_0)}{(y-y_0)^2+(x-x_0)^2} \end{cases}$$

#ΑΣΚΗΣΕΙΣ#

1) Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $2x+4y=1$ μέσω της αντιστροφής ως προς τον μοναδιαίο κύκλο.

- $C((0,0), \rho=1)$
- Έστω, $(x,y) \in (\varepsilon)$
- $(x,y) = \left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}, \frac{y'}{x'^2+y'^2} \right)$
- $2 \cdot \frac{x'}{(x')^2+(y')^2} + \frac{4y'}{(x')^2+(y')^2} = 1 \Rightarrow 2x'+4y' = x'^2+y'^2$

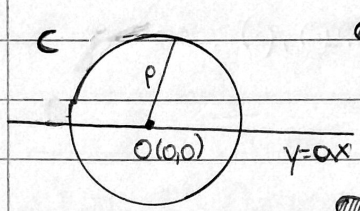
$\Rightarrow x'^2 - 2x + 1 - 1 + y'^2 - 4y' + 2^2 - 2^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + (y'-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

* Κύκλος, (1,2) και ακτίνας $\sqrt{5}$.

ΕΞΑΙΡΕΙΤΑΙ ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

2) Να βρεθεί η εικόνα της ευθείας $y=\alpha x$ ως προς την αντιστροφή του $C((0,0), \rho=1)$



- είδαμε, ότι: $(x,y) = \left(\frac{x'}{x'^2+y'^2}, \frac{y'}{x'^2+y'^2} \right)$
- $\frac{y'}{x'^2+y'^2} = \alpha \frac{x'}{x'^2+y'^2} \Rightarrow y' = \alpha x' / \{(0,0)\}$

Εκτός του (0,0) $\in (\varepsilon)$.

Αν είχα την $y=ax+b$

$y' = ax' + b(x'^2+y'^2)$ → Αν $b=0$: Ευθεία

→ Αν $b\neq 0$: Κύκλος.

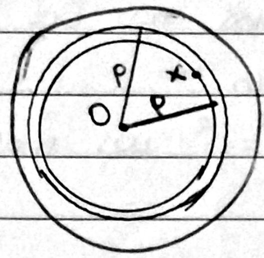
ΑΡΧΙΚΟ ΣΧΗΜΑ → ΕΙΚΟΝΑ ΜΕΣΩ $C(O,\rho)$

- Ευθεία που διέρχεται από το O → Ευθεία που διέρχεται από το O.
- Ευθεία που δεν διέρχεται από το O → Κύκλος που διέρχεται από το O.

3) Η εικόνα του C μέσω αντιστροφής C.

- Από τη σχέση $OP \cdot OP' = r^2$, έχουμε ότι κάθε $P \to P = P'$

4) Να βρεθεί η εικόνα ενός κύκλου με ίδιο κέντρο με το κέντρο του κύκλου αντιστροφής και διαφορετική ακτίνα.



- Έστω, X: τυχαίο σημείο του c', αν X' η εικόνα του $\Rightarrow (OX)(OX') = \rho^2$

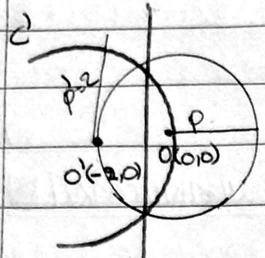
$\Rightarrow \rho' \cdot OX' = \rho^2$

$\Rightarrow OX' = \dfrac{\rho^2}{\rho'}$ → Η απόσταση του X' από το O = ΣΤΑΘΕΡΗ.

* Άρα, $X' \in$ σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ^2/ρ'

* Τα εσωτερικά σημεία → εξωτερικά.

5) Να βρεθεί η εικόνα του κύκλου $c'((-2,0),2)$ ως προς τον μοναδιαίο κύκλο αντιστροφής.



- Το $(0,0) \in c'$; άρα εξαιρείται.

$c': (x+2)^2+y^2=4$

- $x=\dfrac{x'^2}{x'^2+y'^2}$
- $y=\dfrac{y'^2}{x'^2+y'^2}$

$$\left(\frac{x'^2}{x'^2+y'^2}+2\right)^2+\frac{y'^2}{x'^2+y'^2}=2^2$$

- $x^2+4x+y^2+y^2+4=4 \Leftrightarrow x^2+4x+y^2=0$

$\Leftrightarrow 1+4x'=0 \Leftrightarrow x'=-\dfrac{1}{4}$

- Κύκλος που διέρχεται από το O $\longrightarrow$ Ευθεία που δεν διέρχεται από το O.
- ΚΥΚΛΟΣ ΠΟΥ ΔΕΝ ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ το O $\longrightarrow$ Κύκλος που δεν διέρχεται από το O

6) Να βρεθεί η εικόνα του $c': (x-a)^2+(y-b)^2=\rho^2$ ως προς κύκλο αντιστροφής του μοναδιαίο.

$x=\dfrac{x'}{x'^2+y'^2}$

- $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2=\rho^2$

$x^2+y^2-2ax-2by+\gamma=0$

$y=\dfrac{y'}{x'^2+y'^2}$

- $\underbrace{\left(\dfrac{x'^2}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\dfrac{y'^2}{x'^2+y'^2}\right)^2}-2a\dfrac{x'}{x'^2+y'^2}-2b\dfrac{y'}{x'^2+y'^2}+\gamma=0$

$$\frac{1}{x'^2+y'^2}-\frac{2ax'-2by'}{x'^2+y'^2}+\gamma=0$$

$\Rightarrow 1 - 2ax' - 2by' + \gamma(x'^2 + y'^2) = 0$

Κυκλος!

αρκεί $\gamma \neq 0 \rightarrow (0,0) \notin C'$

Αν $\gamma = 0 \rightarrow$ ΕΥΘΕΙΑ

$a^2 + b^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (0,0) \in C'$

7) ΕΦΑΡΜΟΓΗ (Θ. ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ)

Ν.Δ.Ο σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ το γινόμενο των διαγωνίων του είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών. Τι ισχύει, αν το ΑΒΓΔ όχι-εγγράψιμο

$\left\{ \text{Δίνεται, } p_1'p_2' = \dfrac{\rho^2 \, p_1p_2}{(Op_1)(Op_2)} \right.$, p_1, p_2: αντίστροφα των p_1', p_2' ως προς αντιστροφή κέντρου Ο κ/ ακτίνας ρ $\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ (ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)

Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο, το γινόμενο των διαγωνίων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των δύο ζευγών των απέναντι πλευρών.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει

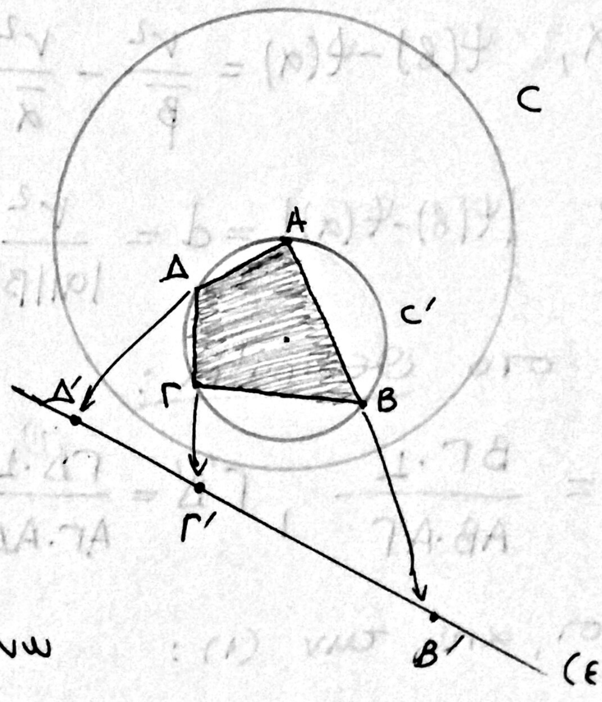
$ΑΓ \cdot ΔΒ \leq ΑΒ \cdot ΔΓ + ΒΓ \cdot ΑΔ$

Με την ισότητα να ισχύει όταν ΑΒΓΔ εγγράψιμο

Αποδ. (Θεωρ. Πτολεμαίου)

Έστω η αντιστροφή φ ως προς τον κύκλο C με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ίση με 1 (το Α εξαιρείται)

Ο κύκλος C′ μέσω του κύκλου αντιστροφής C απεικονίζεται σε μία επεκτεταμένη ευθεία (ε), αφού διέρχεται από το κέντρο του C. Άρα, και τα Β, Γ, Δ θα απεικονισθούν πάνω σε αυτήν την ευθεία (ε) ως



$φ(Β)=Β'$, $φ(Γ)=Γ'$, $φ(Δ)=Δ'$. (όπως στο σχήμα)

Άρα, $Β'Γ' + Γ'Δ' = Β'Δ'$. (1)

Είναι αναγκαίο να αποδείξουμε ένα βοηθητικό ΛΗΜΜΑ

ΛΗΜΜΑ

Τυχόντα σημεία στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ μέσω αντιστροφής φ σε κύκλο C κέντρου O και ακτίνας r, απεικονίζονται στα $\varphi(\alpha)$ και $\varphi(\beta)$ (όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$) τ/ω η απόσταση μεταξύ των $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ να είναι:

$$d=\frac{r^2}{|\alpha||\beta|}|\alpha-\beta|$$

Αποδ

Γνωστό ότι στο μιγαδικό επίπεδο τυχόν $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ μέσω αντιστροφής αναπαρίσταται ως:

$$\varphi(z)=\frac{r^2}{\bar{z}}.$$

Άρα, $$\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\frac{r^2}{\bar{\beta}}-\frac{r^2}{\bar{\alpha}}=\frac{r^2}{\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}}(\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$

άρα $$|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)|=d=\frac{r^2}{|\alpha||\beta|}\cdot|\alpha-\beta|$$

άρα στο Θεώρημα:

$$B'\Gamma'=\frac{B\Gamma\cdot 1}{AB\cdot A\Gamma},\quad \Gamma'\Delta'=\frac{\Gamma\Delta\cdot 1}{A\Gamma\cdot A\Delta},\quad B'\Delta'=\frac{B\Delta}{AB\cdot A\Delta}$$

Έτσι, από την (1):

$$\frac{B\Gamma}{AB\cdot A\Gamma}+\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma\cdot A\Delta}=\frac{B\Delta}{AB\cdot A\Delta}\Leftrightarrow\boxed{A\Delta\cdot B\Gamma+AB\cdot\Gamma\Delta=A\Gamma\cdot B\Delta}$$

Αποδ. (Ανισότητα Πτολεμαίου)

Αν τα σημεία A, B, Γ, Δ δεν βρίσκονται πάνω σε κύκλο (ή σε ευθεία) τότε $AB\Gamma\Delta$ όχι εγγράψιμο και άρα B', Γ', Δ' δεν θα βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία άρα αντί της σχέσης (1), έχουμε: $B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' \geq B'\Delta'$ όπου αντικαθιστώντας προκύπτει η ανισότητα: $\boxed{A\Delta \cdot B\Gamma + AB \cdot \Gamma\Delta \geq A\Gamma \cdot B\Delta}$